La démonstration – La droite des milieux

Pour prendre un bon départ

Initiation à la démonstration

1) Complète les raisonnements suivants :

a. On sait que EFG est un triangle isocèle en E.

Si ……………………………………………alors il a deux côtés de même longueur.

Donc ………………………………………………

b. On sait que ABCD est …………………………………...

Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Donc ………………………………………………

c. On sait que EFGH est un rectangle.

Si un………………………est un ………………alors ses côtés opposés sont ……………….

Donc EF = ………

Parallélogramme – démonstration

2°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit I le milieu de [BC]. Soit A' le symétrique de A par rapport à I. Démontre que le quadrilatère ABA'C est un parallélogramme.

3°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit D et E les symétriques respectifs de B et C par rapport à A. Démontre que le quadrilatère BCDE est un parallélogramme.

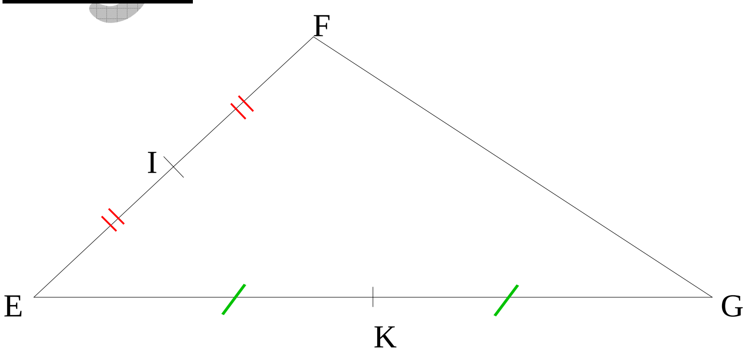
4°) Trace un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de [DC]. Soit E le symétrique de A par rapport à I. Démontre que (AC) // (DE) et que (AD) // (CE).

5°) Construire deux parallélogramme ABCD et DCEF. Démontre que AB = EF et que (AB) // (EF).

6°) Trace un parallélogramme ABCD. La parallèle à (AC) passant par B coupe (DC) en E. Démontre que ABEC est un parallélogramme.

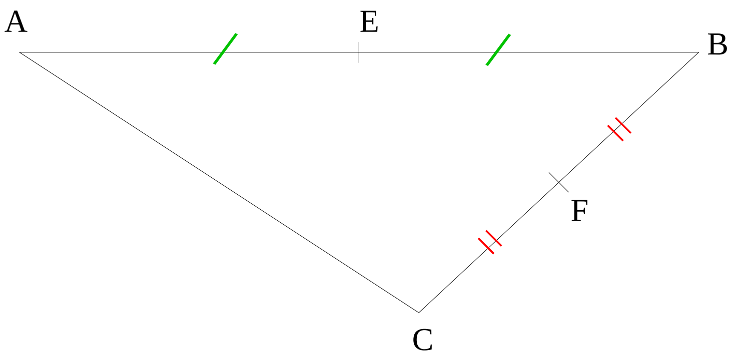
7°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit I le milieu de [BC] et soit J le milieu de [AC]. Soit A' le symétrique de A par rapport à I. Soit B' le symétrique de B par rapport à J. Démontre que les quadrilatère ACA'B et AB'CB sont des parallélogrammes.

Exercice n°1 :



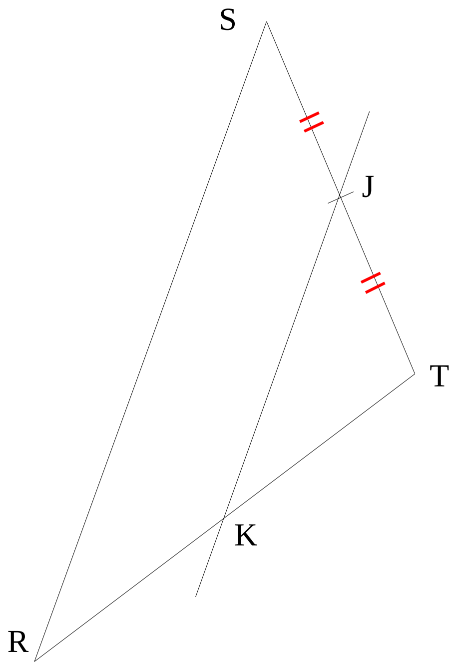
Démontre que les droites (IK) et (FG) sont parallèles

Exercice n°2 :



AB = 6 cm
AC = 5 cm
CB = 3 cm

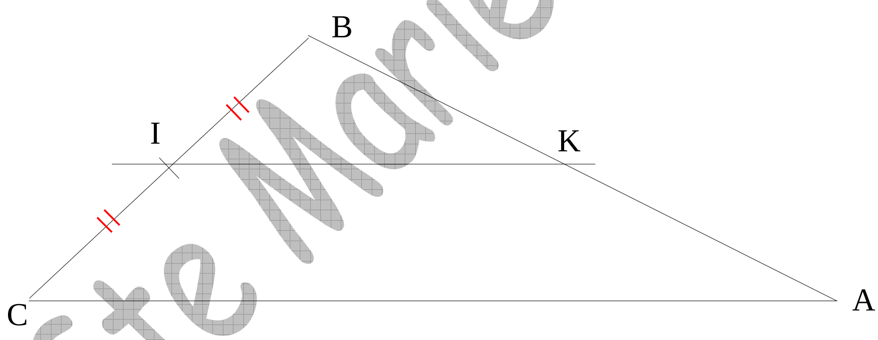
Calcule la longueur du segment [EF]
Justifie ta réponse.



Exercice n°3 :

(SR) // (JK)

Démontre que le point K est le milieu du segment [RT]



Exercice n°4 :
Les droites (IK) et (CA) sont parallèles.
CA = 8,5 cm.

1) Démontre que le point K est le milieu du segment [AB].
2) Calcule IK. Justifie la réponse.

Exercice n°5 : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD) . Soit I le milieu de [AD] et K le milieu de [BD].

1°) Faire une figure
2°) Démontre que (IK) parallèle à (AB)
3°) En déduire que (IK) parallèle à (DC)
4°) Démontre que (IK) coupe [BC] en son milieu
5°) Calcule IK
6°) Calcule KJ
7°) Calcule IJ

Exercice n°6 :
Dans un triangle ABC, les côtés [AB], [BC] et [AC] mesurent respectivement 5 cm, 4,5 cm et 3 cm. Le point I est le milieu du côté [AB]. La parallèle à (BC) passant par I coupe [AC] en J.
1°) Faire une figure.
2°) Calcule AJ.

Exercice n°7 :
On considère un triangle ABC. Soit A' le milieu de [BC] , B' le milieu de [AC] , C' le milieu de [AB]. Soit I le point d'intersection de (AA') et (B'C').
1°) Faire une figure.
2°) Démontre que (B'C') est parallèle à (BC).
3°) Démontre que I est le milieu de [AA'].

Exercice n°8 :
On considère un cercle de centre I.
- [BC] est un diamètre de ce cercle et A est un point de ce cercle.
- La parallèle à (IA) passant par C coupe (BA) en un point D.

1°) Faire une figure.
2°) Démontre que le point A est le milieu de [BD].

Exercice n°9 :
On considère le triangle QSN.
- Soit T le milieu de [SN] et M le milieu de [QN].
- Soit P le symétrique de T par rapport à S.
- La droite (PM) coupe (SQ) en R.

1°) Faire une figure.
2°) Démontre que (MT) est parallèle à (RS).
3°) Démontre que R est le milieu de [PM].

Correction Démonstration – La droite des milieux

Pour prendre un bon départ

Initiation à la démonstration

1°) Complète les raisonnements suivants :

d. On sait que EFG est un triangle isocèle en E.

Si **un triangle est isocèle** alors il a deux côtés de même longueur.

Donc **EF = EG**

e. On sait que ABCD est **un losange**.

Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Donc **(AC) perpendiculaire à (DB)**

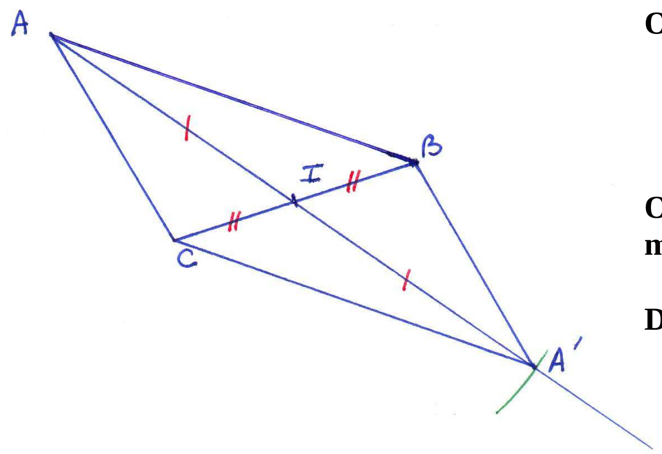
f. On sait que EFGH est un rectangle.

Si un **quadrilatère** est un **rectangle** alors ses côtés opposés sont **de la même longueur**.

Donc EF = **GH**

Parallélogramme – démonstration

2°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit I le milieu de [BC]. Soit A' le symétrique de A par rapport à I. Démontre que le quadrilatère ABA'B' est un parallélogramme.



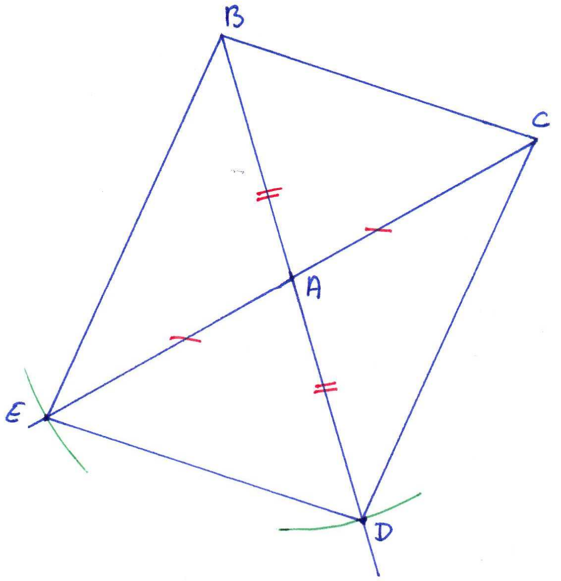
On sait que :

- **I milieu de [BC] ;**
- **I milieu de [AA'] car A' est le symétrique du point A par rapport à I.**
-

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc : ABA'B' est un parallélogramme

3°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit D et E les symétriques respectifs de B et C par rapport à A. Démontre que le quadrilatère BCDE est un parallélogramme.



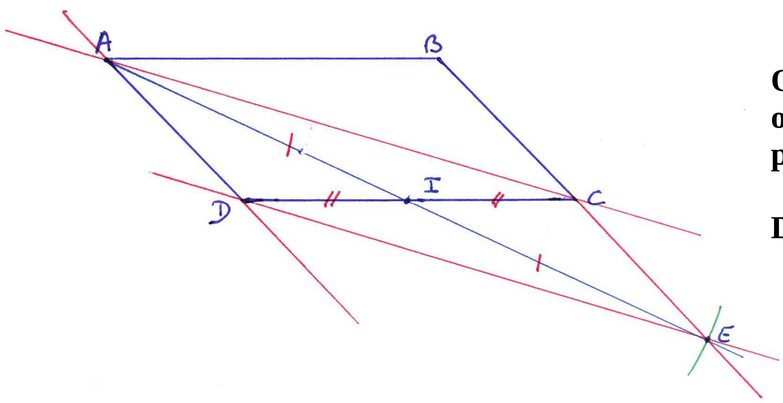
On sait que :

- **A milieu de [BD] car D est le symétrique du point B par rapport à A ;**
- **A milieu de [EC] car E est le symétrique du point C par rapport à A.**

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc : BCDE est un parallélogramme

4°) Trace un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de [DC]. Soit E le symétrique de A par rapport à I. Démontre que (AC) // (DE) et que (AD) // (CE).



On sait que :

- **I milieu de [DC] ;**
- **I milieu de [EA] car E est le symétrique du point A par rapport à I.**

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

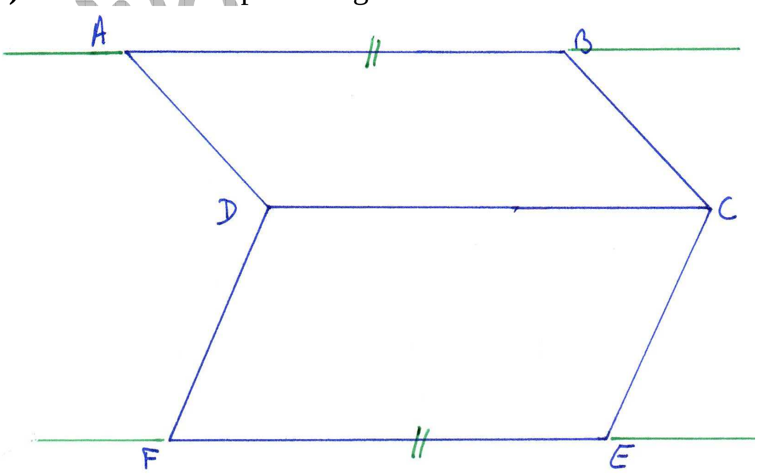
Donc : ACED est un parallélogramme

On sait que : ACED est un parallélogramme

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Donc : (AC) // (DE) et (AD) // (CE).

5°) Construire deux parallélogramme ABCD et DCEF. Démontre que AB = EF et que (AB) // (EF).



On sait que : ABCD est un parallélogramme.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Donc : AB = DC et (AB) // (DC)

De même,
On sait que : DCEF est un parallélogramme.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Donc : DC = EF et (DC) // (EF)

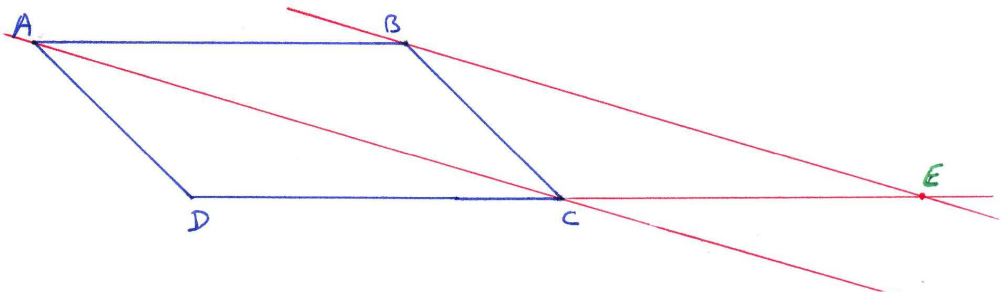
On sait que : AB = DC et DC = EF
Donc : AB = EF

On sait que : (AB) // (DC) et (DC) // (EF)

Or, si deux droites sont parallèles à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

Donc : (AB) parallèle à (EF)

6°) Trace un parallélogramme ABCD. La parallèle à (AC) passant par B coupe (DC) en E. Démontre que ABEC est un parallélogramme.



On sait que : ABCD est un parallélogramme.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

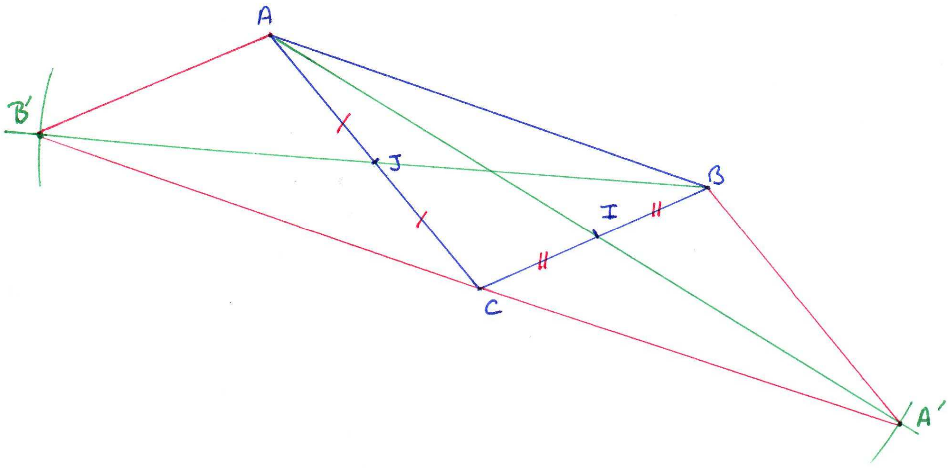
Donc : (AB) // (CE)

On sait que : (AC) // (BE) et (AB) // (CE)

Or, si un quadrilatère à ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.

Donc : ABEC est un parallélogramme.

7°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit I le milieu de [BC] et soit J le milieu de [AC]. Soit A' le symétrique de A par rapport à I. Soit B' le symétrique de B par rapport à J. Démontre que les quadrilatère ACA'B et AB'CB sont des parallélogrammes.



On sait que :

- **I milieu de [BC] ;**
- **I milieu de [AA'] car A' est le symétrique du point A par rapport à I.**

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc : ACA'B est un parallélogramme

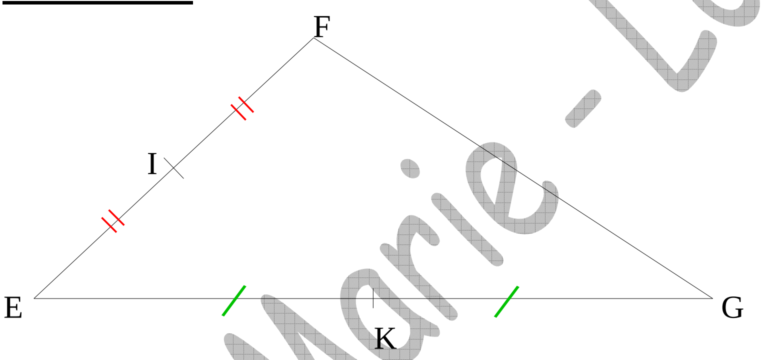
On sait que :

- **J milieu de [AC] ;**
- **J milieu de [BB'] car B' est le symétrique du point B par rapport à J.**

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc : AB'CB est un parallélogramme

Exercice n°1 :

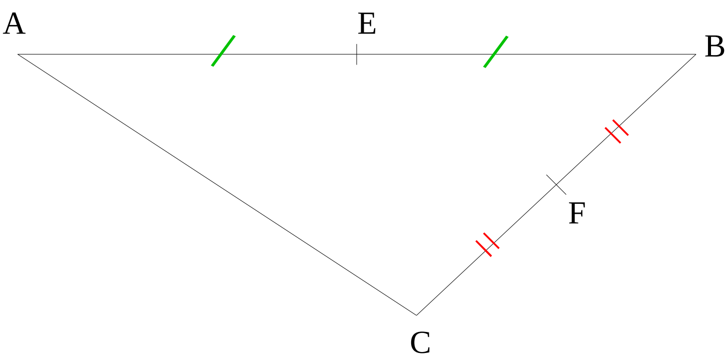


Démontre que les droites (IK) et (FG) sont parallèles

On sait que : - **EFG est un triangle.**
- **I milieu de [EF]**
- **K milieu de [EG]**

Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle.

Donc (IK) est parallèle à (FG).



Exercice n°2 :

AB = 6 cm
AC = 5 cm
CB = 3 cm

Calcule la longueur du segment [EF]

Justifie ta réponse.

On sait que : **- ABC est un triangle.**
- E milieu de [AB]
- F milieu de [BC]

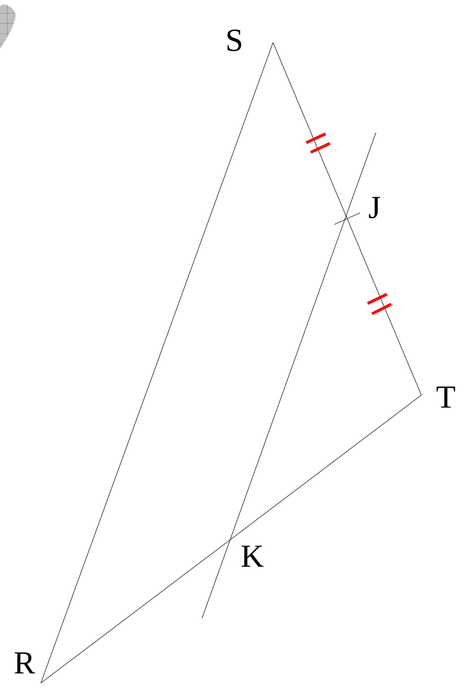
Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle

Donc $EF = \frac{1}{2} \times AC = \frac{1}{2} \times 5 = 2{,}5$

Conclusion : **EF = 2,5 cm**

<u>Exercice n°3 :</u>

(SR) // (JK)
Démontre que le point K est le milieu du segment [RT]

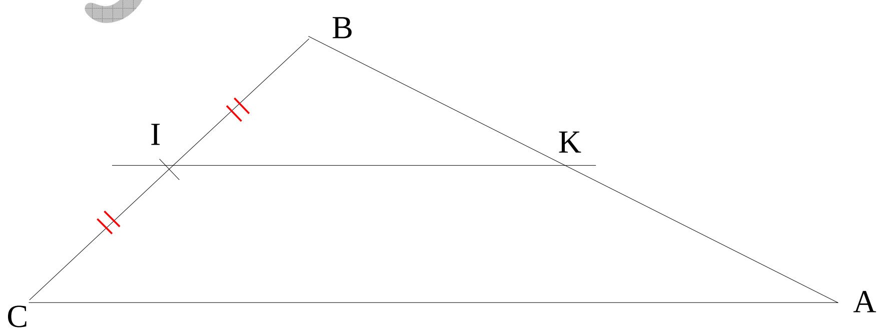


On sait que : **- STR est un triangle**
- J est le milieu de [ST]
- (SR) est parallèle à (JK)

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu

Donc K est le milieu de [RT]

<u>Exercice n°4 :</u>



Les droites (IK) et (CA) sont parallèles.
CA = 8,5 cm.

3) Démontre que le point K est le milieu du segment [AB].
4) Calcule IK. Justifie la réponse.

1) Démontrons que K milieu de [AB]

On sait que : - ABC est un triangle
- I est le milieu de [CB]
- (IK) est parallèle à (CA)

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu

Donc K est le milieu de [AB]

2) Calcul de IK

On sait que : - ABC est un triangle.
- I milieu de [CB]
- K milieu de [AB] (d'après la question 1))

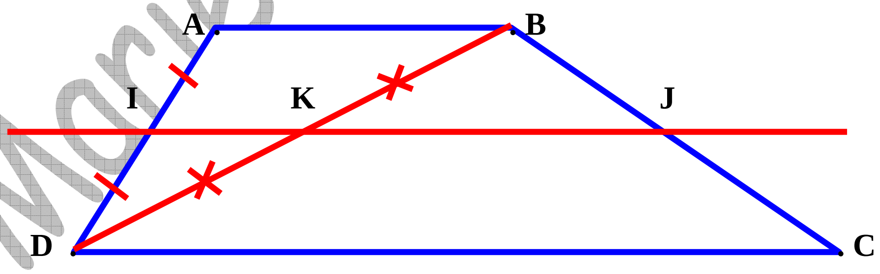
Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle

Donc $IK = ½ \times AC = ½ \times 8{,}5 = 4{,}25$

Conclusion : **IK = 4,25 cm**

Exercice n°5 : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD) . Soit I le milieu de [AD] et K le milieu de [BD].
1°) Faire une figure
2°) Démontre que (IK) parallèle à (AB)
3°) En déduire que (IK) parallèle à (DC)
4°) Démontre que (IK) coupe [BC] en son milieu
5°) Calcule IK
6°) Calcule KJ
7°) Calcule IJ

1°)



2°) Démontrons que (IK) parallèle à (AB)
On sait que : - ABD est un triangle ; I milieu de [AD] ; K milieu de [BD].

Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle
Donc (IK) parallèle à (AB)

3°) Déduire que (IK) parallèle à (DC)
On sait que : - ABCD est un trapèze donc les droites (AB) et (DC) sont parallèles.
- (IK) parallèle à (AB)

Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles
Donc (IK) parallèle à (DC)

4°) Démontrons que (IK) coupe [BC] en son milieu

On sait que : - BCD est un triangle ; K est milieu de [DB] et (IK) est parallèle à (DC)

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu

Donc (IK) coupe [BC] en son milieu

5°) <u>Calcul de IK</u>

On sait que : - ABD est un triangle.
- K est milieu de [DB]
- I est milieu de [AD]

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle

Donc IK = ½ AB

6°) <u>Calcul de KJ</u>

On sait que : - DBC est un triangle.
- K est milieu de [DB]
- J est milieu de [BC]

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle

Donc KJ = ½ DC

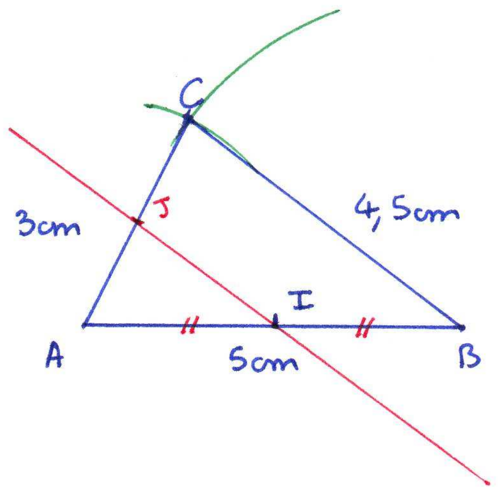
7°) <u>Calcul de IJ :</u>

$$\boxed{IJ = IK + KJ = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} (AB + DC)}$$

Le segment [IJ] est appelé « base moyenne » du trapèze

<u>Exercice n°6 :</u>

1°) Figure.



2°) **<u>Calcule de AJ.</u>**

On sait que : - ABC est un triangle
- I milieu de [AB]
- (IJ) parallèle à (BC)

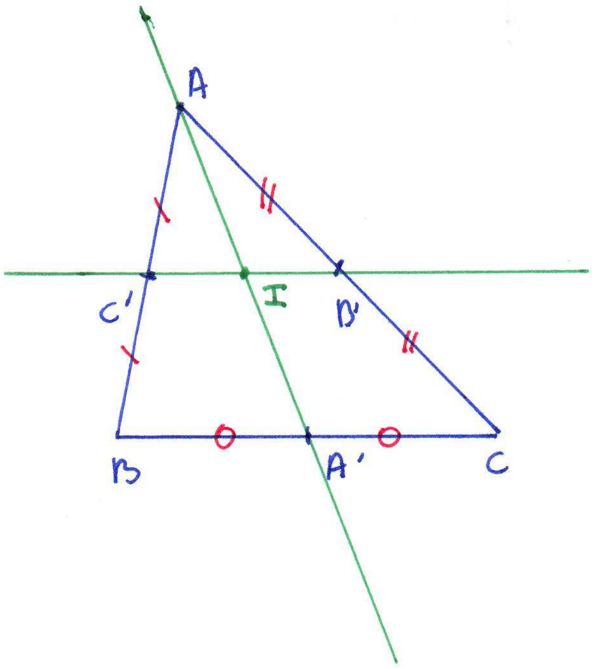
Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc J est milieu de [AC]

Ainsi : $AJ = \frac{1}{2} \times AC = \frac{1}{2} \times 3 =$ **1,5 (cm)**

Exercice n°7 :

1°) Figure.



2°) Démontrons que (B'C') est parallèle à (BC).
On sait que : - ABC est un triangle.
- C' est le milieu de [AB]
- B' est le milieu de [CA].

Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle

Donc (CB) est parallèle à (C'B')

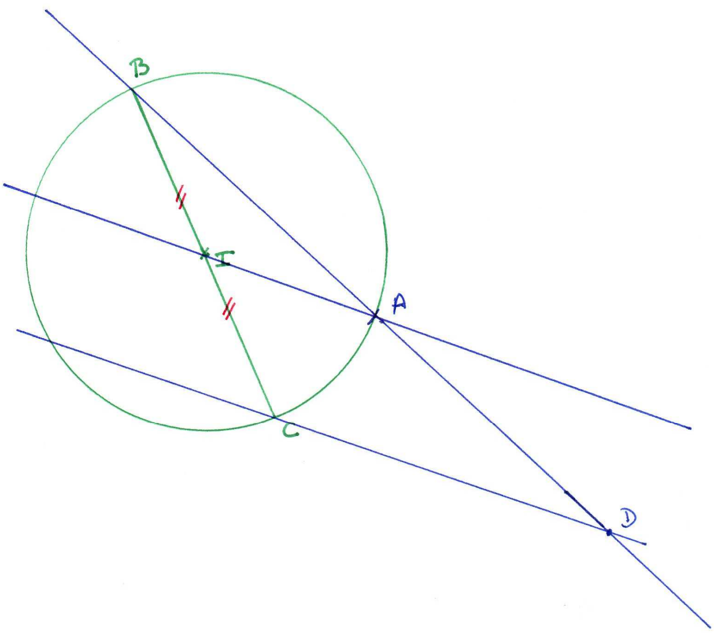
3°) Démontrons que I est le milieu de [AA'].
On sait que : - AA'C est un triangle.
- B' est le milieu de [AC].
- (IB') est parallèle à (A'C) car I est un point de [C'B'] , A' est un point de [BC] et d'après la question 2°) (C'B') parallèle à (BC).

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc I est milieu de [AA']

Exercice n°8 :

1°) Figure.



2°) Démontrons que le point A est le milieu de [BD].

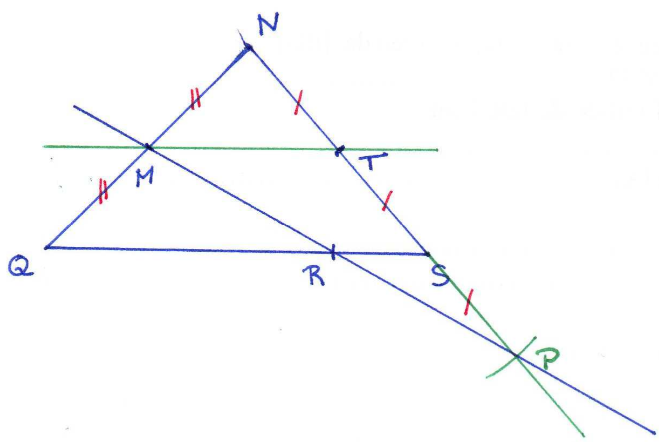
On sait que : - BCD est un triangle
- I milieu de [BC] car [BC] est un diamètre du cercle de centre I.
- (IA) parallèle à (CD)

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc A est milieu de [BD]

Exercice n°9 :

1°) Figure.



2°) Démontrons que (MT) est parallèle à (RS).
On sait que : - SQN est un triangle.
- M est le milieu de [QN].
- T est le milieu de [SN].
Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un t
au troisième côté du triangle

Donc (MT) est parallèle à (RS)

3°) Démontrons que R est le milieu de [PM].
On sait que : - PMT est un triangle

- S milieu de [TP] car P est le symétrique de T par rapport à S.
- (MT) parallèle à (RS)

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc R est milieu de [RS]